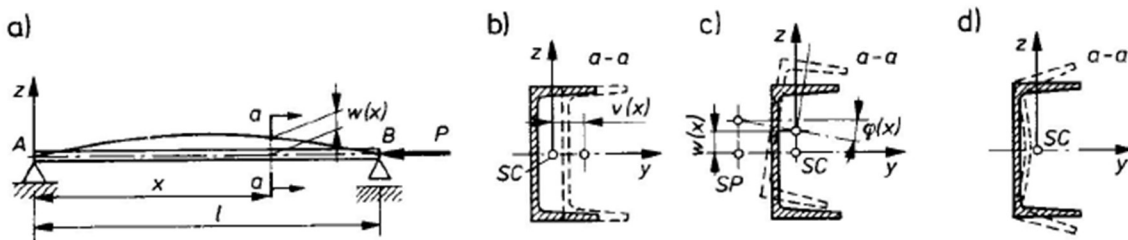


STATECZNOŚĆ PRĘTÓW CIENKOŚCIENNYCH OTWARTYCH

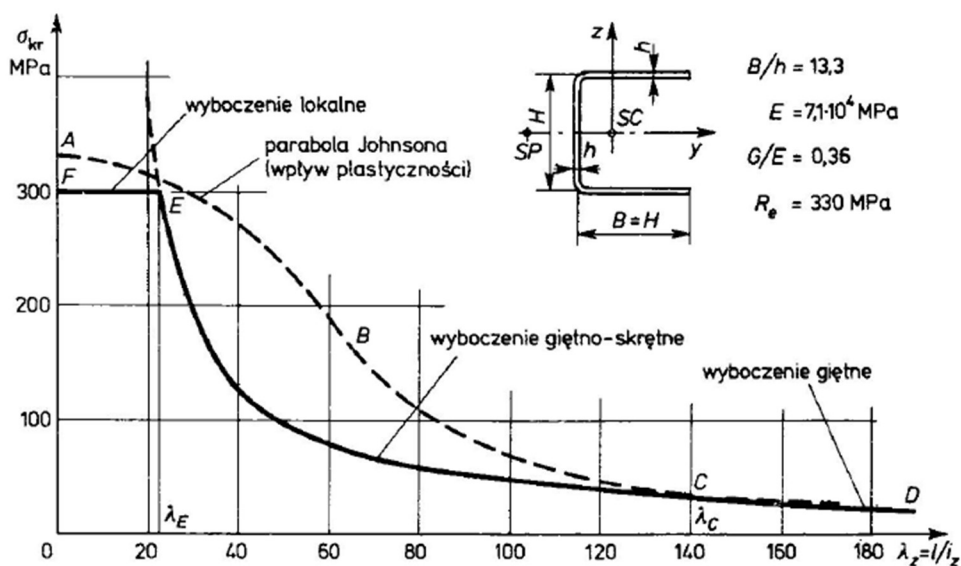
1. Podstawy teoretyczne .

Pręt cienkościenny o profilu otwartym charakteryzują się bardzo małą sztywnością $C = GJ_s$ na skręcanie swobodne w porównaniu do sztywności giętej EJ_y lub EJ_z . Fakt ten odbija się w zagadnieniach stateczności konstrukcji mających takie pręty . I tak w typowym zagadnieniu wyboczenia ściskanego pręta utrata stateczności może mieć postać : giętą , giętno-skrętną albo lokalną . W pierwszych dwóch przypadkach pierwotnie prosta oś pręta ulega wygięciu (rys. 1a) , przy czym poprzeczny przekrój pręta zachowuje swój kształt ulegając bądź prostemu przesunięciu $v(x)$ (wyboczenie giętne – rys. 1b) , bądź przesunięciu $w(x)$ i obrotowi $\phi(x)$ (wyboczenie giętno-skrętne – rys. 1c) . Przy wyboczeniu lokalnym przekrój poprzeczny ulega deformacji w ten sposób , że jego naroża nie mają przemieszczeń (rys. 1d) . To ostatnie zagadnienie wchodzi w zakres stateczności płyt lub powłok a nie pręta .



Rys. 1. Postać utraty stateczności pręta cienkościennego : a) szkic pręta , b) wyboczenie giętne , c) wyboczenie giętno-skrętne , d) wyboczenie lokalne .

Okazuje się przy tym , że dla pręta cienkościennego o określonym profilu mogą występować wszystkie trzy warianty zależnie od jego smukłości $\lambda_z = l/i_z$. Tak na przykład dla ceownika (rys. 2) , gdy $\lambda_z > \lambda_c$, najmniejsze naprężenie krytyczne odpowiada wyboczeniu giętnemu w płaszczyźnie xy , gdy $\lambda_E < \lambda_z < \lambda_c$, najbardziej prawdopodobne jest wyboczenie giętno-skrętne , przy którym $w(x)$ różne od 0 i $\phi(x)$ różne od 0 a wreszcie dla bardzo małych smukłości decyduje wyboczenie lokalne . W rezultacie zależność $\sigma_{kr}(\lambda_z)$ opisuje linia FECD , zamiast linii ABCD odpowiadające wyboczeniu giętnemu .



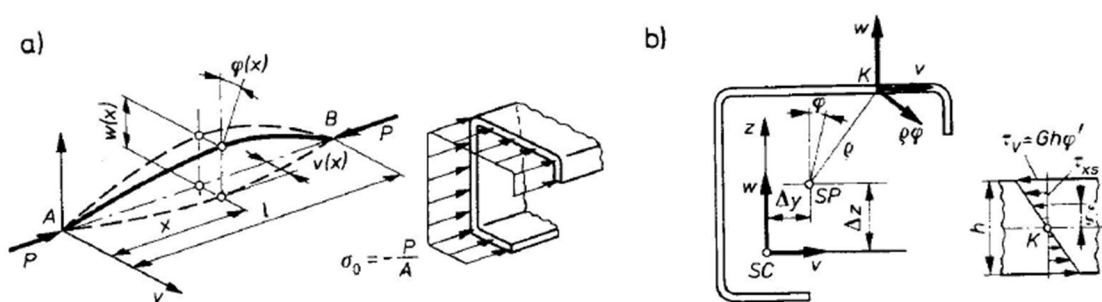
Rys. 2. Typowy wykres $\sigma_{kr}(\lambda_z)$ dla pręta o symetrycznym przekroju otwartym .

Analiza stateczności sprowadza się do zbadania warunków istnienia równowagi pręta w położeniu wychylonym ze stanu pierwotnej równowagi, tj. prostego ściskania (rys. 3), przy którym w przekrojach poprzecznych panują równomiernie rozłożone naprężenia $\sigma_x = -\sigma_0$. To wychylenie, określone przez przemieszczenia środka ciężkości $v(x)$, $w(x)$ oraz kąt obrotu $\phi(x)$ względem środka sił poprzecznych SP, powodują zmianę naprężeń σ_x , wyrażone teraz wzorem :

$$\sigma_x = -\sigma_0 - E y v'' - E z w'' - E \omega_0 \phi'',$$

gdzie ω_0 – główne pole wycinkowe przekroju, y i z – współrzędne obranego punktu K w układzie centralnym. Ponadto w płaszczu pojawiają się styczne zmienne liniowo wzdłuż grubości, których ekstremalne wartości :

$$\tau_y = G h \phi'.$$



Rys. 3. Wielkości charakterystyczne przy wyboczeniu giętno-skrętnym : a) obraz osi pręta w stanie wychylonym ze stanu pierwotnego , b) obraz przemieszczeń w płaszczyźnie przekroju i stan dominujących naprężeń τ_{xs} .

Jeśli jako metodę analizy przyjąć kryterium energetyczne , powyższe wzory umożliwiają wyznaczenie zmiany energii odkształcenia δL_w spowodowanej dodatkowym wychyleniem :

$$\delta L_w = \int_V \left(\frac{\sigma_x^2}{2E} + \frac{\tau_{xs}^2}{2G} \right) dV - \frac{\sigma_0^2 A l}{2E},$$

gdzie całkowanie obejmuje całą objętość V pręta składnik drugi jest energią odkształcenia w stanie początkowym . Podstawiając wyrażenia σ_x (powyżej) oraz $\tau_{xs} = \tau_y(2\xi)$ można przeprowadzić całkowanie po polu przekroju A . Przy uwzględnieniu , że osie y i z są centralne , otrzymuje się :

$$\delta L_w = \frac{1}{2} \int_0^l [E J_y (w'')^2 + 2E J_{yz} w'' v'' + E J_z (v'')^2 + C_\omega (\phi'')^2 + C (\phi')^2] dx$$

gdzie J_y , J_z , J_{yz} momenty bezwładności i odśrodkowy względem osi centralnych y i z , C_ω i C odpowiednio sztywności na nieswobodne i swobodne skręcanie .

Poza wielkością δL_w , drugim składnikiem niezbędnym do sformułowania energetycznego kryterium stateczności jest praca sił zewnętrznych . Z racji spłaszczenia przekroju praca sił $\sigma_0 dA$ jest różna dla różnych włókien . I tak dla włókna K (rys. 3) , którego przemieszczenia v_K i w_K w płaszczyźnie przekroju są :

$$v_K = v + (z - \Delta z) \phi , \quad w_K = w - (y - \Delta y) \phi$$

zbliżenie się przekrojów końcowych A i B tego włókna jest z dokładnością do małych wyższego rzędu

$$u_K = \frac{1}{2} \int_0^l [(v'_K)^2 + (w'_K)^2] dx.$$

W wyniku zmiany energii potencjalnej siły $\sigma_0 dA$ ściskającej włókno K jest $\sigma_0 dA \cdot u_K$, a dla całego pręta

$$\delta L_z = \int_A \sigma_0 dA \left\{ \int_0^l \frac{1}{2} [(v'_K)^2 + (w'_K)^2] dx \right\}.$$

Podstawiając do powyższego wzoru pochodne v'_K i w'_K można przez scałkowanie po polu przekroju A dojść do wyniku

$$\delta L_z = \frac{P}{2} \int_0^l [(w')^2 + (v')^2 + r_{SP}^2 (\varphi')^2 - 2\Delta z v' \varphi' + 2\Delta y w' \varphi'] dx,$$

gdzie $P = \sigma_0 A$ - siła ściskająca pręt a r_{SP} - biegunowy promień bezwładności przekroju względem SP.

Jak udowadnia się w teorii stateczności, całkowita zmiana energii potencjalnej $\delta\Pi = \delta L_w - \delta L_z$ ma w stanie krytycznym wartość stacjonarną. Fakt ten daje w wyniku trzy równania Eulera – Lagrange'a odpowiadające kolejnym wariacjom wielkości w , v i φ . W przypadku, gdy pręt jest przyrządkowy równania te mają postać

$$\left. \begin{aligned} EJ_y w^{IV} + EJ_{yz} v^{IV} + P_{kr} w'' + P_{kr} \Delta y \varphi'' &= 0, \\ EJ_z v^{IV} + EJ_{yz} w^{IV} + P_{kr} v'' - P_{kr} \Delta z \varphi'' &= 0, \\ C_n \varphi^{IV} + (P_{kr} r_{SP}^2 - C) \varphi'' + P_{kr} \Delta y w'' - P_{kr} \Delta z v'' &= 0, \end{aligned} \right\}$$

przy czym oznaczenie $P = P_{kr}$ akcentuje, że badany stan jest krytyczny. Równocześnie stacjonarność $\delta\Pi$ narzuca warunki brzegowe. Tak na przykład z wariacji w wynika dla $x = 0$ i $x = l$

$$\left. \begin{aligned} w = 0 \quad \text{lub} \quad P_{kr} (w' + \Delta y \varphi') + EJ_y w''' + EJ_{yz} v''' &= 0, \\ w' = 0 \quad \text{lub} \quad EJ_y w'' + EJ_{yz} v'' &= 0. \end{aligned} \right\}$$

Z warunków tych dwa mają charakter kinematyczny ($w = 0$, $w' = 0$), pozostałe przedstawiają odpowiednio równowagę sił tnących bądź zerowanie się momentu gnącego $M_y = EJ_y w'' + EJ_{yz} v''$. Podobnie z wariacji v i φ otrzymuje się dwie grupy po cztery warunki, w rezultacie czego układ trzech równań Eulera – Lagrange'a można rozwiązać narzucając dla każdego z końcowych przekrojów po dwa warunki dla wielkości w , v i φ .

Podstawowym dla techniki przypadkiem jest wyboczenie ściskanego pręta podpartego przegubowo na końcach . Przekroje końcowe nie mogą obracać się względem osi pręta , mogą jednak się swobodnie pacyć . Odpowiadające temu warunki brzegowe dla $x = 0$ i $x = l$

$$v = w = \phi = 0 , \quad v'' = w'' = \phi'' = 0$$

narzucają rozwiązanie układu równań Eulera – Lagrange’a w postaci

$$w = B_w \sin(\pi x/l) , \quad v = B_v \sin(\pi x/l) , \quad \phi = B_\phi \sin(\pi x/l)$$

gdzie B_w , B_v i B_ϕ to wielkości stałe . Podstawienie powyższych wyrażań do układu Eulera – Lagrange’a daje układ równań algebraicznych jednorodnych

$$\left. \begin{aligned} (P_w - P_{kr}) B_w + P_{vw} B_v - P_{kr} \Delta y B_\phi &= 0, \\ P_{vw} B_w + (P_v - P_{kr}) B_v + P_{kr} \Delta z B_\phi &= 0, \\ -P_{kr} \Delta y B_w + P_{kr} \Delta z B_v + (P_\phi - P_{kr}) r_{SP}^2 B_\phi &= 0, \end{aligned} \right\}$$

liniowych względem B_w , B_v i B_ϕ . Skróczone oznaczenia

$$P_w = \frac{\pi^2 EJ_y}{l^2}, \quad P_v = \frac{\pi^2 EJ_z}{l^2}, \quad P_{vw} = \frac{\pi^2 EJ_{yz}}{l^2}, \quad P_\phi = \frac{1}{r_{SP}^2} \left(\frac{\pi^2 C_\omega}{l^2} + C \right)$$

Mają z wyjątkiem P_{vw} oczywisty sens fizyczny . I tak P_w i P_v są obciążeniami wyboczenia giętnego w płaszczyznach xz i xy , P_ϕ - obciążeniem przy wyboczeniu skrętnym .

Niezerowe rozwiązanie układu algebraicznego , czyli równowaga pręta w stanie wyboczonym wystąpi , gdy wyznacznik charakterystyczny tego układu jest równy zero . Prowadzi to do równania

$$\begin{aligned} (P_w - P_{kr})(P_v - P_{kr})(P_\phi - P_{kr}) r_{SP}^2 - P_{kr}^2 [(P_w - P_{kr}) \Delta z^2 + (P_v - P_{kr}) \Delta y^2] \\ - P_{vw}^2 (P_\phi - P_{kr}) r_{SP}^2 - 2P_{kr}^2 P_{vw} \Delta y \Delta z = 0 \end{aligned}$$

Dające trzy wartości P_{kr} . Dyskusję tych wartości najłatwiej dokonać , jeśli osie y i z są centralne i główne , gdyż wtedy $P_{vw} = 0$. I tak , gdy jedna z osi , na przykład y , jest osią symetrii to $v = 0$ i jednym z pierwiastków równania charakterystycznego jest

$$(P_{kr})_1 = P_v = \pi^2 EJ_z / l^2$$

Natomiast dwa pozostałe mają wartości

$$\left. \begin{aligned} (P_{kr})_2 \\ (P_{kr})_3 \end{aligned} \right\} = \frac{\psi (P_w + P_\phi) \pm \sqrt{\psi^2 (P_w + P_\phi)^2 - 4\psi P_w P_\phi}}{2}$$

gdzie $\psi = (r_{SP}/r_0)^2$, przy czym $r_{SP} = \sqrt{(J_{SP}/A)}$ a $r_0 = \sqrt{(J_0/A)}$. Tutaj J_0 oznacza biegunowy moment bezwładności przekroju względem środka ciężkości , czyli $J_0 = J_y + J_z$. Natomiast J_{SP} jest biegunowym momentem bezwładności przekroju względem środka sił poprzecznych , czyli $J_{SP} = J_0 + A \cdot (\Delta y^2 + \Delta z^2) = J_y + J_z + A \cdot (\Delta y^2 + \Delta z^2)$

Symbol C oznacza sztywność skręcania swobodnego

$$C = G \cdot J_s \quad \text{a} \quad J_s = \frac{1}{3} \sum_i^n s_i h_i^3$$

Symbol C_ω oznacza sztywność skręcania nieswobodnego

$$C_\omega = E \cdot J_\omega$$

a do obliczenia J_ω dla typowych profili cienkościennych służy poniższa tabela .

TABLICA 2.1. Charakterystyki geometryczne profili otwartych

Przekrój	Położenie SP	Obraz pola ω_0	Obraz momentu S_ω	Moment J_ω
	$h_y = \frac{H}{1 + \psi}$ $\psi = \left(\frac{B_1}{B_2}\right)^3 \frac{h_1}{h_2}$			$J_\omega = \frac{B^3 H^2 h_1}{12(1 + \psi)}$
	$h_y = \frac{B}{2(1 + \psi)}$ $\psi = \frac{H h_2}{6 B h_1}$			$J_\omega = \frac{B^3 H^2 (B - 3h_2) h_1}{6} + I_z h_2^2$
	$SP \equiv SC,$ $\psi = \frac{H h_2}{2 B h_1}$			$J_\omega = \frac{B^3 H^2 h_1}{12} \times \left[2 - \frac{3\psi}{(1 + \psi)^2} \right]$
	$h_y = \frac{B}{\sqrt{2} \sqrt{2 - (1 - \psi)^2}}$ $\psi = \frac{B}{H}$			$J_\omega = \frac{B^3 H^2 h}{6} \frac{4 + 3\psi}{2 - (1 - \psi)^2}$
	$h_y = \eta R, \quad \eta = \frac{K_1}{K_2}$ $K_1 = 2 \sin \beta_0 (1 + \psi \beta_0) - 2 \beta_0 \cos \beta_0$ $K_2 = \beta_0 + 2\psi \sin^2 \beta_0 - \sin \beta_0 \cos \beta_0$			$J_\omega \equiv 2R^5 h \left[\frac{\beta_0^3}{3} + 2\eta M_1 + \eta^2 M_2 + \psi L_3 \right]$ $M_1 = \beta_0 \cos \beta_0 - \sin \beta_0$ $M_2 = \frac{\beta_0 - \sin \beta_0 \cos \beta_0}{2}$
<p>W profilu złożonym z płaskich ścianek przechodzących przez jeden punkt niezależnie od liczby ścianek i ich wymiarów jest</p> <p>$SP = C; \quad \omega_0(s) = 0; \quad S_\omega(s) = 0; \quad J_\omega = 0.$</p>				

Wartość mniejszej z sił $(P_{kr})_2$ lub $(P_{kr})_3$ należy porównać z $(P_{kr})_1 = P_v$ aby orzec, która ostatecznie postać wybożenia jest najbardziej prawdopodobna.

Jest faktem, że w przypadku, gdy środek sił poprzecznych nie leży na żadnej z głównych centralnych osi, najmniejszy z pierwiastków równania charakterystycznego jest mniejszy niż najmniejsza z sił P_v, P_w, P_ϕ . Oznacza to, że wybożenie giętno-skrętne jest najbardziej prawdopodobne. Postać wybożenia pręta zależy od smukłości. Przy dużych smukłościach najmniejszą z wielkości wyjściowych jest P_v lub P_w . Jeśli tą wielkością jest P_v to postać wybożenia odpowiadająca najmniejszej sile P_{kr} zbliża się do giętnego, w którym dominująca jest amplituda B_v a pozostałe amplitudy B_w i B_ϕ są bardzo małe. Dla małych smukłości i dostatecznie cienkościennego płaszczka najmniejszą wielkością wyjściową staje się P_ϕ i wtedy najmniejszej sile P_{kr} odpowiada odkształcenie zbliżone do czysto skrętnego z dominującą rolą amplitudy B_ϕ .

Podobnie proste wyniki można otrzymać dla innych rodzajów podparcia pręta. I tak, gdy końce są utwierdzone, czyli dla $x = 0$ i $x = l$

$v = w = \phi = 0$ oraz $v' = w' = \phi' = 0$, równanie charakterystyczne zostaje to samo, z tym że

$$P_w = \frac{4\pi^2 EJ_y}{l^2}, \quad P_v = \frac{4\pi^2 EJ_z}{l^2}, \quad P_{vw} = \frac{4\pi^2 EJ_{yz}}{l^2}, \quad P_\phi = \frac{1}{r_{SP}^2} \left(\frac{4\pi^2 C_\omega}{l^2} + C \right)$$

Wreszcie, gdy jeden koniec pręta jest utwierdzony a drugi swobodny bądź gdy jeden koniec jest utwierdzony a drugi podparty przegubowo, równanie charakterystyczne zostaje nie zmienione, z tym że w oznaczeniach ostatnich wzorów należy zamiast $4\pi^2$ wstawić odpowiednio $(\pi^2/4)$ lub $20,19$.